

Examen

Le 10/01/2026

Durée: 2 heures

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sur cet espace on définit un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. On munit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la filtration naturelle de $(B_t)_{t \geq 0}$ définie par $\forall t \geq 0 \quad \mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$, on obtient alors l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$

Exercice 1. On définit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ par :

$$X_t = \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s$$

où $\text{sign}(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $\text{sign}(x) = -1$ pour $x < 0$.

- (1) Montrer que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien défini.
- (2) Montrer que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien.
- (3) Montrer que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale
- (4) Prouver que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (Utiliser le théorème de caractérisation de Lévy).
- (5) Montrer que $\mathbb{E}[X_t B_s] = 0$ pour tous $t, s \geq 0$.

Exercice 2. On considère la variable aléatoire Z définie par :

$$Z := \int_0^1 t dB_t$$

- (1) Justifier que la variable aléatoire Z est bien définie comme intégrale de Wiener.
- (2) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[Z]$ et la variance $\text{Var}(Z)$ de Z .
- (3) En utilisant une intégration par parties (ou la formule d'Itô), montrer que :

$$Z = B_1 - \int_0^1 B_t dt$$

- (4) En interprétant la dernière intégrale comme une limite de sommes de Riemann, montrer que Z est une variable gaussienne. Préciser sa loi complète $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2} dB_t, \quad X_0 = 0$$

à l'aide du changement de variable $Y_t = \arcsin(X_t)$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$(*) \quad \begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

où x, r, σ sont des constantes strictement positives.

- (1) Montrer que l'équation (*) admet une solution unique.
- (2) On pose $Y_t = e^{-rt}X_t$. Donner l'EDS vérifiée par Y_t , puis en déduire les expressions explicites de Y_t et X_t .

Corrigé type

1 Exercice 1

Soit le processus défini par : $X_t = \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s$.

1. **Définition de l'intégrale :** Pour que l'intégrale stochastique soit bien définie au sens d'Itô, l'intégrande $\theta_s = \text{sign}(B_s)$ doit être adapté et de carré intégrable ($\in L^2([0, t])$).

- $\theta_s = \text{sign}(B_s)$ est adapté car B_s est adapté.
- $E \left[\int_0^t \theta_s^2 ds \right] = E \left[\int_0^t (\text{sign}(B_s))^2 ds \right] = E \left[\int_0^t 1 ds \right] = t < \infty$.

Le processus (X_t) est donc bien défini.

2. X_t est une intégrale de Wiener. D'après les propriétés de l'intégrale de Wiener, c'est processus gaussien..
3. **Nature du processus :** X_t est une intégrale de Wiener. D'après les propriétés de l'intégrale de Wiener, c'est une martingale continue de carré intégrable.
4. **Caractérisation de Lèvy :**

- $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue.
- $X_0 = 0$.
- La variation quadratique est : $\langle X \rangle_t = \int_0^t (\text{sign}(B_s))^2 ds = t$.

D'après le théorème de Lèvy, une martingale continue issue de 0 dont la variation quadratique est égale à t est un mouvement Brownien standard. Donc (X_t) est un mouvement Brownien standard.

5. Pour $s \leq t$: $E(X_t B_s) = E \left(\int_0^t \text{sign}(B_u) dB_u \cdot \int_0^s 1 dB_u \right) = \int_0^s E(\text{sign}(B_u)) du$. Or $E(\text{sign}(B_u)) = 0$ par symétrie de la loi de B_u . $\Rightarrow E[X_t B_s] = 0$.

Exercice 2

Soit $Z = \int_0^1 t dB_t$.

1. Z est bien définie comme intégrale de Wiener car la fonction $f(t) = t$ est déterministe et de carré intégrable sur $[0, 1]$: $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} < \infty$.
2. **Moments :** $E(Z) = 0$ et $\text{Var}(Z) = E(Z^2) = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
3. **Intégration par parties :** $Z = [tB_t]_0^1 - \int_0^1 B_t dt = B_1 - \int_0^1 B_t dt$.
4. **Loi :** $Z \sim N(0, \frac{1}{3})$.

Exercice 3

Soit l'EDS : $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t$ avec $X_0 = 0$. Posons $Y_t = \arcsin(X_t)$. En utilisant la formule d'Itô avec $f(x) = \arcsin(x)$:

- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

- $d\langle X \rangle_t = (1 - X_t^2)dt$.

$$dY_t = \frac{1}{\sqrt{1-X_t^2}} \left(-\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t \right) + \frac{1}{2} \frac{X_t}{(1-X_t^2)^{3/2}} (1 - X_t^2)dt = dB_t.$$
 Comme $Y_0 = \arcsin(0) = 0$, on a $Y_t = B_t$, d'où $X_t = \sin(B_t)$.

Exercice 4

Soit l'EDS : $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$, $X_0 = x > 0$. Les coefficients sont Lipschitziens et à croissance linéaire, donc il existe une solution unique. En posant $Y_t = e^{-rt}X_t$, on obtient $dY_t = \sigma Y_t dB_t$. En posant $Z_t = \ln(Y_t)$ et par Itô : $dZ_t = \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$. La solution est $X_t = x \exp \left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \right)$.