

Nom & Prénom :

Date : 13/01/2026

Durée : 02H00

Examen

Questions de cours (5 points) : Cocher sur la bonne réponse :

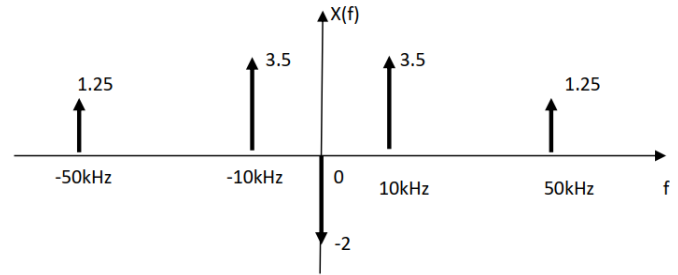
1) Dans une série de Fourier, le premier terme (a_0) correspond à :	Réponse
a) La fréquence d'échantillonnage.	
b) La moyenne du signal.	
c) La variance du signal.	
2) Tout signal périodique peut être représenté par :	
a) La somme des signaux rectangulaires.	
b) La somme des signaux rectangulaires et triangulaires.	
c) La somme des signaux en sinus et cosinus.	
3) La transformée de Fourier du signal porte (rect) est :	
a) Une fonction triangle.	
b) Un sinus cardinal.	
c) Une peigne de Dirac $\delta_T(t)$.	
4) La densité spectrale de puissance egal à :	
a) La transformée de Fourier de l'autocorrélation du signal.	
b) La puissance du signal	
c) La transformée de Fourier du signal.	
5) L'Expression $x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$ représente :	
a) La transformée de Fourier du signal	
b) La transformée de laplace du signal	
c) Le signal échantillonné	
6) Comment se caractérise le spectre d'un signal echantillonné $X_e(f)$?	
a) C'est l'inverse du spectre original ($1/X(f)$)	
b) C'est une répétition cyclique du spectre original $X(f)$ avec une période F_e	
c) Il est identique au spectre original $X(f)$	
7) Pour échantillonner un signal $x(t)$ de fréquence maximal F_m , il faut choisir :	
a) $F_e < 2F_M$.	
b) $F_e > 2F_M$.	
c) $F_e = 2F_M$.	
8) Comment est déterminé l'ordre d'un filtre analogique?	
a) Par l'ordre de l'équation différentielle ou du dénominateur de la fonction de transfert.	
b) Par la valeur de la fréquence de coupure.	
c) Par le nombre de résistances dans le circuit.	

9) Quelle est la pente de la courbe de gain d'un filtre passe-bas du premier ordre dans la bande atténuée?	
a) -3 dB/décade.	
b) -10 dB/décade.	
c) -20 dB/décade.	
10) Quelle est la caractéristique principale du filtre de Butterworth?	
a) Il présente des ondulations dans la bande passante pour une meilleure sélectivité.	
b) Sa réponse en fréquence est "maximally flat" (gain aussi constant que possible en bande passante).	
c) Il possède une phase non linéaire.	

Exercie 1 (6 points)

Soit le signal $x(t)$ dont son spectre $X(f)$ est réel pur représenter dans la figure suivante :

- Est-il un signal periodique ? si oui, donner sa frequence et deduire sa période.



- Calculer son energie totale et sa puissance moyenne totale.

- Trouver l'experssion mathématique du signal $x(t)$.

- On applique ce signal à l'entrée d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 30KHz$. Donner l'expression du signal de sortie $y(t)$.

5. On applique ce meme signal à l'entrée d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure $f_c = 30\text{KHz}$. Donner l'expression du signal de sortie $s(t)$.

.....

.....

.....

.....

6. Quelle sera la différence si les filtres en (4) et (5) ne sont pas idéaux ?

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 (5 points)

On considère un filtre qui est régi par l'équation différentielle suivante:

:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6 y(t) = x(t)$$

Avec $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement, le signal d'entrée et le signal de sortie du filtre.

1. Trouver la fonction de transfert du filtre $H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$, donner le type et l'ordre du filtre.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Déterminer sa **réponse impulsionnelle** $h(t)$ (la réponse pour une entrée impulsion de Dirac)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Déterminer sa **réponse indicielle** $y(t)$ (la réponse pour une entrée échelon unitaire)

[illegible]

Exercise 3 (4 points)

On suppose que A et B deux v.a indépendantes de moyenne nulle et de variance : $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. On construit le signal: $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, Où ω est une constante positive.

1. Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$

[illegible]

On donne : $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

2. Le signal $\mathbf{X}(t)$ est-il stationnaire ?

.....

.....

.....

.....

.....

Deduire la densité spectrale de puissance du signal $\mathbf{X}(t)$

[illegible]

Dr. S. Zehani
Bonne chance.

Nom & Prénom :

Date : 13/01/2026

Durée : 02H00

Solution d'Examen

Questions de cours (5 points = 0.5×10) : Cocher sur la bonne réponse :

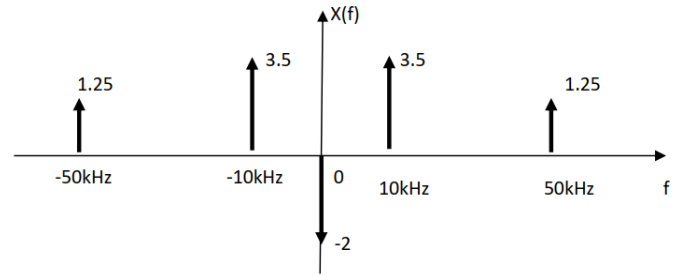
1) Dans une série de Fourier, le premier terme (a_0) correspond à :	Réponse
a) La fréquence d'échantillonnage.	
b) La moyenne du signal.	X
c) La variance du signal.	
2) Tout signal périodique peut être représenté par :	
d) La somme des signaux rectangulaires.	
e) La somme des signaux rectangulaires et triangulaires.	
f) La somme des signaux en sinus et cosinus.	X
3) La transformée de Fourier du signal porte (rect) est :	
d) Une fonction triangle.	
e) Un sinus cardinal.	X
f) Une peigne de Dirac $\delta_T(t)$.	
4) La densité spectrale de puissance est :	
d) La transformée de Fourier de l'autocorrélation du signal.	X
e) La puissance du signal	
f) La transformée de Fourier du signal.	
5) L'Expression $x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$ représente :	
d) La transformée de Fourier du signal	
e) La transformée de laplace du signal	
f) Le signal échantillonné	X
6) Comment se caractérise le spectre d'un signal échantillonné $X_e(f)$?	
d) C'est l'inverse du spectre original ($1/X(f)$)	
e) C'est une répétition cyclique du spectre original $X(f)$ avec une période F_e	X
f) Il est identique au spectre original $X(f)$	
7) Pour échantillonner un signal $x(t)$ de fréquence maximal F_m, il faut choisir :	
a) $F_e < 2F_M$.	
b) $F_e > 2F_M$.	X
c) $F_e = 2F_M$.	
8) Comment est déterminé l'ordre d'un filtre analogique?	
d) Par l'ordre de l'équation différentielle ou du dénominateur de la fonction de transfert.	X
e) Par la valeur de la fréquence de coupure.	
f) Par le nombre de résistances dans le circuit.	

9) Quelle est la pente de la courbe de gain d'un filtre passe-bas du premier ordre dans la bande atténuée?	
d) -3 dB/décade.	
e) -10 dB/décade.	
f) -20 dB/décade.	X
10) Quelle est la caractéristique principale du filtre de Butterworth?	
d) Il présente des ondulations dans la bande passante pour une meilleure sélectivité.	
e) Sa réponse en fréquence est "maximally flat" (gain aussi constant que possible en bande passante).	X
f) Il possède une phase non linéaire.	

Exercice 1 (6 points)

Soit le signal $x(t)$ dont son spectre $X(f)$ est réel pur représenté dans la figure suivante :

7. Est-il un signal périodique ? si oui, donner sa fréquence et déduire sa période.



$X(f)$ est un spectre **discret**, donc $x(t)$ est **périodique**.

La fréquence du signal est la fréquence **fondamentale** :

$$f_0 = 10\text{KHz} \rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10000} = 0.1\text{ms} \quad \text{1 point}$$

8. Calculer son énergie totale et sa puissance moyenne totale.

$x(t)$ est **périodique** donc l'énergie est **infinie** : $E_x = +\infty$ **0.5 point**

La puissance : $P_x = \sum |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_5|^2$

$$P_x = |-2|^2 + 2|3.5|^2 + 2|1.25|^2 = 31.625\text{ W}$$

$$P_x = 31.625\text{ W} \quad \text{0.5 point}$$

9. Trouver l'expression mathématique du signal $x(t)$.

$$\begin{aligned} -2\delta(f) &\leftrightarrow -2 \\ 3.5[\delta(f - 10^4) + \delta(f + 10^4)] &\leftrightarrow 7\cos(2\pi 10^4 t) \\ 1.25[\delta(f - 5 \cdot 10^4) + \delta(f + 5 \cdot 10^4)] &\leftrightarrow 2.5\cos(2\pi 5 \cdot 10^4 t) = 2.5\cos(\pi 10^5 t) \end{aligned}$$

Donc l'expression mathématique du signal $x(t)$ est la somme de ces termes :

$$x(t) = -2 + 7\cos(2\pi 10^4 t) + 2.5\cos(\pi 10^5 t) \quad \text{1.5 point}$$

10. On applique ce signal à l'entrée d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 30\text{KHz}$.
Donner l'expression du signal de sortie $y(t)$.

Ce filtre laisse passé les fréquences $|f| < f_c = 30\text{KHz}$ est supprime les fréquences $|f| > f_c = 30\text{KHz}$

Donc $y(t)$ sera egale à : $y(t) = -2 + 7\cos(2\pi 10^4 t)$ 1 point

11. On applique ce meme signal à l'entrée d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure $f_c = 30\text{KHz}$. Donner l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Ce filtre laisse passé les fréquences $|f| > f_c = 30\text{KHz}$ est supprime les fréquences $|f| < f_c = 30\text{KHz}$

Donc $y(t)$ sera egale à : $s(t) = 2.5\cos(\pi 10^5 t)$ 1 point

12. Quelle sera la différence si les filtres en (4) et (5) ne sont pas idéaux ?

Si les filtres n'étaient pas idéaux (Réels : Exp : Butterworth ou Chebyshev), Il y aura atténuation progressive et bande de transition. 0.5 point

Exercice 2 (5 points)

On considère un filtre qui est régi par l'équation différentielle suivante:

:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6 y(t) = x(t)$$

Avec $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement, le signal d'entrée et le signal de sortie du filtre.

4. Trouver la fonction de transfert du filtre $H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$, donner le type et l'ordre du filtre.

$$P^2 Y(P) + 5PY(P) + 6Y(P) = X(P)$$

$$(P^2 + 5P + 6)Y(P) = X(P) \rightarrow \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{1}{P^2 + 5P + 6} = H(P)$$

La fonction du transfert : $H(P) = \frac{1}{P^2 + 5P + 6} = \frac{1}{(P+2)(P+3)}$ 1 point

- Le type et l'ordre du filtre : c'est un filtre passe-bas deuxième ordre 1 point

5. Déterminer sa réponse impulsionnelle $h(t)$ (la réponse pour une entrée impulsion de Dirac)

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(P) = 1 \quad 0.25 \text{ point}$$

On a $H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} \rightarrow Y(P) = H(P)X(P) = H(P) \rightarrow y(t) = h(t)$ 0.25 point

$$H(P) = \frac{1}{P^2+5P+6} = \frac{1}{(P+2)(P+3)} = \frac{a_1}{P+2} + \frac{a_2}{P+3} \quad 0.5 \text{ point}$$

On a deux poles simple, $P = -2$ et $P = -3$

Donc les constantes a_1 et a_2 se calcule selon l'equation suivante (decomposition en elements simple)

$$a_i = \lim_{P \rightarrow -P_i} [H(P) \cdot (P + P_i)] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a_1 = \lim_{P \rightarrow -2} [H(P) \cdot (P + 2)] = \lim_{P \rightarrow -2} \left[\frac{(P+2)}{(P+2)(P+3)} \right] = \lim_{P \rightarrow -2} \frac{1}{(P+3)} = 1$$

$$a_2 = \lim_{P \rightarrow -3} [H(P) \cdot (P + 3)] = \lim_{P \rightarrow -3} \left[\frac{(P+3)}{(P+2)(P+3)} \right] = \lim_{P \rightarrow -3} \frac{1}{(P+2)} = -1$$

$$\text{Donc } H(P) = \frac{1}{P+2} + \frac{(-1)}{P+3} \rightarrow h(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Alors la réponse impulsionnelle est : $y(t) = h(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ 0.5 point

.....

6. Déterminer sa réponse indicielle $y(t)$ (la réponse pour une entrée échelon unitaire)

$$x(t) = e(t) \rightarrow X(P) = \frac{1}{P} \quad 0.25 \text{ point}$$

$$\text{On a } H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} \rightarrow Y(P) = H(P)X(P) = \frac{H(P)}{P} \quad 0.25 \text{ point}$$

$$Y(P) = \frac{1}{P(P^2+5P+6)} = \frac{1}{P(P+2)(P+3)} = \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{P+2} + \frac{a_3}{P+3} \quad 0.5 \text{ point}$$

On a 3 poles simples, donc on fait le meme calcul comme la précédante question

$$a_1 = \lim_{P \rightarrow 0} [H(P) \cdot P] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{P}{P(P+2)(P+3)} \right] = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{(P+2)(P+3)} = \frac{1}{6}$$

$$a_2 = \lim_{P \rightarrow -2} [H(P) \cdot (P + 2)] = \lim_{P \rightarrow -2} \left[\frac{(P+2)}{P(P+2)(P+3)} \right] = \lim_{P \rightarrow -2} \frac{1}{P(P+3)} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \lim_{P \rightarrow -3} [H(P) \cdot (P + 3)] = \lim_{P \rightarrow -3} \left[\frac{(P+3)}{P(P+2)(P+3)} \right] = \lim_{P \rightarrow -3} \frac{1}{P(P+2)} = \frac{1}{3}$$

$$Y(P) = \frac{1}{P(P+2)(P+3)} = \frac{1}{6P} - \frac{1}{2(P+2)} + \frac{1}{3(P+3)}$$

La réponse indicielle est : $y(t) = \frac{1}{6}e(t) - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$ 0.5 point

Exercice 3 (4 points)

On suppose que A et B deux v.a indépendantes de moyenne nulle et de variance : $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. On construit le signal: $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, Où ω est une constante positive.

3. Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$

- La moyenne du signal est : $E[X(t)] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0$ 0.5 point
- La fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))(A\cos(\omega(t + \tau)) + B\sin(\omega(t + \tau)))] \\ &= E[A^2]\cos(\omega t)\cos(\omega(t + \tau)) + E[AB]\cos(\omega t)\sin(\omega(t + \tau)) + E[AB]\sin(\omega t)\cos(\omega(t + \tau)) \\ &\quad + E[B^2]\sin(\omega t)\sin(\omega(t + \tau)) \end{aligned}$$

Puisque les v.a A et B sont indépendantes et de moyenne nulles on a : $E[A.B] = E[A].E[B] = 0$

$$R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = E[A^2]\cos(\omega t)\cos(\omega(t + \tau)) + E[B^2]\sin(\omega t)\sin(\omega(t + \tau))$$

$$R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = \sigma^2(\cos(\omega t)\cos(\omega(t + \tau)) + \sin(\omega t)\sin(\omega(t + \tau))) = \sigma^2\cos(\omega\tau)$$

$$R_X(t, t + \tau) = R_X(\tau) = \sigma^2\cos(\omega\tau) \quad 1.5 \text{ point}$$

4. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ?

La moyenne est nulle et la fonction d'autocorrélation est indépendante du temps, donc le signal est stationnaire. 1 point

5. Deduire la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$

$$S_X(f) = TF\{R_X(\tau)\} = TF\{\sigma^2\cos(\omega\tau)\} = \frac{\sigma^2}{2}(\delta(f - \omega) + \delta(f + \omega)) \quad 1 \text{ point}$$

*Dr. S. Zehani
Bonne chance.*