جامعة محمد خيضر ببـــــــــــــــــــسكرة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية علوم مالية ومحاسبية **السنة الجـــامعية: 2026/2025**

امتحان السداسي الثالث في مقياس إحصاء 3.

التمرين الأول: (4 نقاط)

تبين لمصلحة الضرائب أن نسبة الميزانيات التي بها تدليس هو 10%. سحبنا بالارجاع خلال يوم ما 100 ميزانية على التوالي.

1) ما هو احتمال أن نجد أول تدليس بالميزانية الخامسة؟
2) ما هو احتمال أن نجد أول تدليس بعد الميزانية الثالثة؟
3) ما هو احتمال أن نجد ثلاث ميزانيات بها تدليس؟
4) ما هو احتمال أن نجد بين 5 و35 ميزانية بها تدليس؟

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يلاحظ أحد البنوك أن متوسط عدد الزبائن الذين يصلون إلى الشباك خلال ساعة واحدة هو ($\lambda=6$)، أما متوسط مدة الانتظار (بالدقائق) لزبون مختار عشوائيًا قبل تقديم الخدمة هو **$\mu=0.5$** دقيقة.

المطلوب:

أولًا: إذا اعتبرنا x متغير عشوائي يمثل عدد الزبائن الذين يصلون إلى الشباك خلال ساعة واحدة

1) اكتب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغيرX؟ (0.5)
2) احسب احتمال أن:
   - يصل بالضبط 4 زبائن خلال ساعة واحدة. (0.5)
   - يصل على الأكثر 2 زبون خلال نصف ساعة. (0.5)

ثانيًا: إذا اعتبرنا T متغير عشوائي يمثل متوسط مدة الانتظار (بالدقائق) لزبون قبل تقديم الخدمة.

3) اكتب دالة الكثافة الاحتمالية لـ T. (0.5)
4) احسب احتمال أن تكون مدة الانتظار **بين 2 و5 دقائق**. (1)
5) فسّر اقتصاديًا أثر تغير المعلمتين λ و μ على أداء البنك؟ (1)

التمرين الثالث: (6 نقاط)

لنفترض لدينا متغيرين عشوائيين متقطعين X (يمثل مستوى الدخل الشهري للأسرة) و y (يمثل مستوى الادخار الشهري للأسرة)، تم تقسيم كل منهما إلى ثلاث فئات كما يلي:

$X=0$: أسرة ذات دخل منخفض، $X=1$: أسرة ذات دخل متوسط، $X=2$: أسرة ذات دخل مرتفع،

$Y=0$: أسرة ذات ادخار ضعيف، $Y=1$: أسرة ذات ادخار متوسط، $Y=2$: أسرة ذات ادخار مرتفع

يمثل الجدول التالي التوزيع الاحتمالي المشترك لمستويات الدخل والادخار لعينة من الأسر:

الدخل X \ الادخار Y	0	1	2
0	0.2	0.05	0
1	0.05	0.25	0.15
2	0	0.05	0.25

المطلوب:

1. اعطي تحليل اقتصادي للنتائج الواردة في الجدول؟
2. أوجد: $P(X\leq 1, Y\geq 1)$
3. أوجد التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y، وفسرهما اقتصاديا؟
4. أوجد القيم التالية: $E(X)$ و $E(Y)$ و $Var(X)$ و $Var(Y)$؟
5. احسب التباين المشترك $Cov(X,Y)$؟
6. احسب معامل الارتباط الخطي بين X و Y وفسر معناه؟

التمرين الرابع: (6 نقاط)

شركة ناشئة تستثمر في مشروع رقمي، يعبر عن الربح الصافي اليومي (بألف الدينار) بالمتغير العشوائي المستمر x، تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لـ x بالعلاقات التالية:

$$f(x) = \begin{cases} Kx(10-x) & \text{إذا كان } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

1) حدد قيمة الثابت k حتى تكون f(x) كثافة احتمالية؟
2) احسب احتمال أن يكون الربح اليومي محصور بين 3 و 7 الاف دينار؟
3) احسب دالة التوزيع الاحتمالي F(x)؟
4) إذا علمت أن المؤسسة تحقق ربحا جيدا إذا تجاوز ربحها 8000 دينار، ما هو احتمال أن تحقق المؤسسة ربحا جيدا؟
5) احسب المتوسط والانحراف المعياري؟
6) في ضوء النتائج السابقة ناقش ما إذا كان المشروع مخاطره مرتفعة مقارنة بعوائده؟

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية لامتحان لإحصاء 03 للسنة الثانية علوم مالية ومحاسبة 2026/2025

حل التمرين الأول

لدينا احتمال أن تكون الميزانية مدلَّسة هو p=0.1، السحب **بالإرجاع** (التجارب مستقلة)، عدد الميزانيات المسحوبة:n=100

1- حساب احتمال أن نجد أول تدليس بالميزانية الخامسة

نفترض x م ع يحسب عدد السحبات حتى نحصل على أول تدليس (نجاح) بالتالي فهو يتبع التوزيع الهندسي حيث:

$$p(x = k) = (1 - p)^{k-1}p \Rightarrow p(x = 5) = (1 - 0.1)^{5-1}0.1 = 0.06561$$ 1

2- ما هو احتمال أن نجد أول تدليس بعد الميزانية الثالثة.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - ((P(X = 1) + (P(X = 2) + (P(X = 3)$$
$$= 1 - ((1 - 0.1)^{1-1}0.1 + (1 - 0.1)^{2-1}0.1 + (1 - 0.1)^{3-1}0.1) = 0.729$$ 1

3- احتمال أن نجد ثلاث ميزانيات بها تدليس

نسمي x م ع الذي يحسب عدد مرات الحصول على ميزانية بها تدليس، بالتالي فإن توزيعه هو توزيع ثنائي الحدين: $X \sim B(100, 0.1)$

$$P(X = k) = c_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = c_{100}^k 0.1^k (1 - 0.1)^{100-k}$$
$$(P(X = 3) = c_{100}^3 0.1^3 (1 - 0.1)^{100-3} = (3100) \times 0.001 \times (0.9)97 \approx 0.58 \times 10^{-2}$$ 1

4- احتمال أن نجد بين 5 و35 ميزانية بها تدليس.

أي $P(5 \leq X \leq 35)$ عدد الحالات كثير الواجب احسابها لذلك نلجأ إلى تقريب توزيع ثنائي الحد للتوزيع الطبيعي

- شروط التقريب: $np = 100 * 0.1 = 10 > 5 \quad ; \; nq = 100 * 0.9 = 90 > 5$ ومنه شروط التقريب موجودة.
- تصحيح الاستمرارية: $P(5 \leq X \leq 35)$ تصبح $P(4.5 \leq X \leq 35.5)$.
- $\mu = np = 10; \;\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 * 0.9} = 3$

ومنه

$$P(4.5 \leq X \leq 35.5) = P\left(\frac{4.5 - 10}{3} \leq z \leq \frac{35.5 - 10}{3}\right) = P(z \leq 8.33) - P(z \leq -1.83)$$
$$= \big(1 - P(z \leq 1.83)\big) - P(z \leq 8.33) = 1 - \big(1 - P(z \leq 1.83)\big) = 0.966$$ 1

حل التمرين الثاني

أولًا: المتغير العشوائي X يمثل عدد الزبائن الذين يصلون خلال ساعة واحدة

6) كتابة دالة الكتلة الاحتمالية للمتغيرX.

بما أن X يمثل عدد الوصول خلال وحدة زمنية ثابتة فتوزيعه الاحتمالي هو **توزيع بواسون:** $X \sim P(\lambda=6)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{6^k}{k!}e^{-6}$$ .0.5

7) حساب الاحتمالات:

أ- يصل بالضبط 4 زبائن خلال ساعة واحدة

$$P(X=4)=\frac{6^4}{4!}e^{-6}=54*e^{-6}=01338$$ 0.5

ب- يصل على الأكثر 2 زبون خلال نصف ساعة

خلال نصف ساعة يصبح المتوسط نصف المتوسط السابق أي $\lambda=3$

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}+\frac{3^1}{1!}e^{-3}+\frac{3^2}{2!}e^{-3}=8.5e^{-3}=0.423$$ 0.5

ثانيًا: إذا اعتبرنا T متغير عشوائي يمثل متوسط مدة الانتظار (بالدقائق) لزبون قبل تقديم الخدمة.

8) كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لـ T

بما أن t هو مدة الانتظار بمتوسط مدة الانتظار هي 0.5بالتالي فتوزيعه الاحتمالي هو **التوزيع الأسي:** $T \sim Exp(\tau=\frac{1}{\mu}=2)$

$f(t)=\mu e^{-\mu t}=2e^{-2t}$ مع $t>0 \Rightarrow F(t)=1-e^{-\mu t}=1-e^{-2t}$ مع $t>0$ 0.5

من فهم من نص التمرين أن μ معلمة التوزيع الأسي فإجابته تعتبر صحيحة.

$f(t)=\mu e^{-\mu t}=0.5e^{-0.5t}$ مع $t>0 \Rightarrow F(t)=1-e^{-\mu t}=1-e^{-0.5t}$ مع $t>0$

9) حساب احتمال أن تكون مدة الانتظار بين 2 و5 دقائق.

$$p(2\le t\le 5)=p(t\le 5)-p(t\le 2)=F(5)-F(2)=(1-e^{-2*5})-(1-e^{-2*3})=0.02$$ 1

من فهم من نص التمرين أن μ معلمة التوزيع الأسي فإجابته تكون بالطريقة التالية.

$$p(2\le t\le 5)=p(t\le 5)-p(t\le 2)=F(5)-F(2)=(1-e^{-0.5*5})-(1-e^{-0.5*3})=0.286$$

10)التفسير الاقتصادي لأثر تغير المعلمتين λ و μ على أداء البنك:

- **أثر تغير λ (معدل وصول الزبائن)**: إن زيادة λ يؤدي لزيادة عدد زبائن مما ينجر عنه: **ضغط على الشبابيك**، يرفع مدة الانتظار ويقلل من جودة الخدمة، قد يسبب فقدان زبائن وعدم رضاهم
- **أثر تغير μ (معدل الخدمة)**: إن زيادة زيادة μ تسريع تقديم الخدمة مما ينجر عنه: تقليص مدة الانتظار، تحسين كفاءة البنك ورضا الزبائن، زيادة القدرة الاستيعابية للشباك

بالتالي الأداء الجيد للبنك يتحقق عند **توازن** بين معدل وصول الزبائن λ ومعدل الخدمة μ، فزيادة λ دون تحسين μ تؤدي إلى الاختناقات، في حين أن رفع μ يحسّن جودة الخدمة ويقلّل زمن الانتظار. 1

<u>حل التمرين الثالث</u>

7. اعطاء تحليل اقتصادي للنتائج الواردة في الجدول:

يُظهر التوزيع المشترك أن:

- الأسر ذات **الدخل المنخفض** تميل للادخار الضعيف والمتوسط.
- الأسر ذات **الدخل المتوسط** تميل إلى الادخار المتوسط والمرتفع. 0.5
- الأسر ذات **الدخل المرتفع** ترتفع لديها احتمالية الادخار المتوسط والمرتفع مقارنةً بالادخار الضعيف.

8. أيجاد: P(X≤1,Y≥1)

القيم الممكنة: (0,1) ,(1,1),(0,2),(1,2)

$$P(X \leq 1, Y \geq 1) = 0.05 + 0.25 + 0 + 0.15 = 0.45$$ 1

9. أيجاد التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y، وتفسيرهما اقتصاديا

التوزيع الهامشي لـX: الأسر ضعيفة الدخل نسبتها في العينة 0.25

$$P(X = x_i) = p_{i\,.} = \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \quad \text{مع } i \in (1,2,3)$$

$P(X = 0) = p_{1\,.} = 0.2 + 0.05 + 0 = 0.25$ (الأسر منخفضة الدخل نسبتها في العينة 0.25)

$P(X = 1) = p_{2\,.} = 0.05 + 0.25 + 0.15 = 0.45$ (الأسر متوسطة الدخل نسبتها في العينة 0.45) 0.75

$P(X = 2) = p_{3\,.} = 0 + 0.05 + 0.25 = 0.30$ (الأسر مرتفعة الدخل نسبتها في العينة 0.30)

التوزيع الهامشي لـY:

$$P(Y = y_j) = p_{.\,j} = \sum_{i=1}^{3} p_{i,j} \quad \text{مع } j \in (1,2,3)$$

$P(Y = 0) = 0.2 + 0.05 + 0 = 0.25$ (الادخار الضعيف يمثل ما نسبته 0.25 من الادخار)

$P(Y = 1) = 0.05 + 0.25 + 0.0 = 0.35$ (الادخار المتوسط يمثل ما نسبته 0.35 من الادخار) 0.75

$P(Y = 2) = 0 + 0.15 + 0.25 = 0.4$ (الادخار المرتفع يمثل ما نسبته 0.4 من الادخار)

10.أيجاد E(X) و E(Y) و Var(X) و Var(Y)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_{i\,.} = 0(0.25) + 1(0.45) + 2(0.3) = 1.05$$ 0.5

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_j p_{.\,j} = 0(0.25) + 1(0.35) + 2(0.4) = 1.15$$ 0.5

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 p_{i.} = 0^2(0.25) + 1^2(0.45) + 2^2(0.3) = 1.65$$

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{3} {y_j}^2 p_{.j} = 0^2(0.25) + 1^2(0.35) + 2^2(0.4) = 1.95$$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.65 - (1.05)2 = 0.5475$ 0.5

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1.95 - (1.15)2 = 0.6275$ 0.5

11. احسب التباين المشترك Cov(X,Y)

نحسب:

$E(XY) = \sum xyP(x,y) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0.25 + 0.30 + 0 + 0.1 + 1 = 1.65$ 0.5

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.65 - (1.05)(1.15) = 0.4425$ 0.5

12. حساب معامل الارتباط الخطي بين X و Y وتفسير معناه

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\boldsymbol{Var(X)Var(Y)}}} = \frac{\mathbf{0.4425}}{\sqrt{\mathbf{0.5475 \times 0.6275}}} \approx \mathbf{0.755}$$ 0.5

تفسير: يوجد ارتباط مقبول موجب بين الدخل والادخار. 0.5

<u>حل التمرين الرابع:</u>

7) تحديد قيمة الثابت k حتى تكون f(x) كثافة احتمالية

حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية يجب أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Kx(10-x)dx = \int_0^{10} Kx(10-x)dx = 1$$

1

$$\int_0^{10} Kx(10-x)dx = K\int_0^{10} 10x - x^2 dx = k\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = k\left(500 - \frac{1000}{3}\right) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{500}}$$

8) حساب احتمال أن يكون الربح اليومي محصور بين 3 و 7 الاف دينار

$$p(3 \le X \le 7) = \int_3^7 \frac{3}{500} x(10-x)dx = \frac{3}{500}\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_3^7 = \frac{3}{500}\left[\left(5*7^2 - \frac{7^3}{3}\right) - \left(5*3^2 - \frac{3^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{500}\left[\left(\frac{686}{3}\right) - (36)\right] = 0.347$$ 1

9) حساب دالة التوزيع الاحتمالي F(x)

$$F(x) = p(0 \le X \le x) \int_0^x \frac{3}{500} x(10-x)dx = \frac{3}{500}\int_0^x 10x - x^2 dx = \frac{3}{500}\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^x$$
$$= \frac{3}{500}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

10)إذا علمت أن المؤسسة تحقق ربحا جيدا إذا تجاوز ربحها 8000 دينار، ما هو احتمال أن تحقق المؤسسة ربحا جيدا؟

تحقيق ربح جيد يعني X>8

$$P(X > 8) = 1 - F(8) = 1 - \frac{3}{500}\left(5 * 8^2 - \frac{8^3}{3}\right) = 1 - 0.896 = 0.104$$ 0.5

11)حساب المتوسط والانحراف المعياري

$$\mathrm{E(X)} = \int_0^{10} xp(x) = \int_0^{10} x\frac{3}{500}x(10-x)dx = \int_0^{10}\frac{3}{500}(10x^2 - x^3)dx \frac{3}{500}\left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} =$$
$$\frac{3}{500}\left[\left(\frac{10}{3} * 1000 - \frac{10000}{4}\right)\right] = \mathbf{5}$$ (أي 5000 دينار) 0.5

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_0^{10} x^2 p(x) = \int_0^{10} x^2\frac{3}{500}x(10-x)dx = \int_0^{10}\frac{3}{500}(10x^3 - x^4)dx \frac{3}{500}\left[\frac{10}{4}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^{10}$$
$$= \frac{3}{500}\left[\left(\frac{10}{4} * 10000 - \frac{100000}{5}\right)\right] = 30$$ 0.5

التباين والانحراف المعياري

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 30 - 25 = 30 - 25 = 5$$
$$\sigma = \sqrt{5} \approx 2.236$$ (أي حوالي 2236 دينار) 0.5

12)مناقشة المخاطر مقارنة بالعوائد

لدينا **متوسط الربح** هو 5000 دينار وذلك **بالانحراف المعياري** 2236 دينار مع **احتمال** 10% **تحقيق الربح الجيد** (**>8000**) وهو أمر ضعيف نسبيًا، بالتالي المشروع **ذو مخاطر متوسطة** وعوائده **مستقرة نسبيًا**، لكنه لا يحقق أرباحًا مرتفعة في أغلب الأحيان، مما يجعله مناسبًا للمستثمرين ذوي النفور من المخاطر 1