جامعــــة محمـد خيضـــر - بسكـــرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
قسـم : الجذع المشترك

سنــة أولى- ل.م.د
مقيــاس: رياضيـــات 1
18 جانفي 2026: (11:00-13:00)

الامتحـان النهـائي

التمرين 01: (4 نقاط) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

- ليكن $a \in]-1, +\infty[$، أحسب $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ - ماذا تستنتج؟
- ليكن $a = -1$، أحسب $\lim_{x \to (-1)^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ - ماذا تستنتج؟

التمرين 02: (6 نقاط) لتكن المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 & = 1 \\ u_{n+1} & = 2u_n + 3 \end{cases}$$

نضع: $V_n = U_n + 3$ من أجل كل $n \geq 1$

1. أثبت أن V_n متتالية هندسية أساسها 2، يطلب تحديد حدها الأول
2. أحسب V_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n
3. أحسب مجموع الحدود: $S_1 = v_1 + v_2 + ... + v_n$.
4. أثبت أن المجموع : $S_2 = u_1 + u_2 + ... + u_n$ يساوي $4(2^n - 1) - 3n$.

التمرين 03: (10 نقاط) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 - x - lnx$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1) ا. أحسب : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ، فسرها هندسيا.

ب. بين أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) ا. بين أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

ب. استنتج أن f متناقصة تماما على $]0; 1]$ و متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) عين معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.
4) أحسب $f(3)$ ثم أرسم (C_f) و (T)
5) ا. تحقق أن: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - xlnx$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على $]0, +\infty[$

ب. أحسب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى C_f و حامل محور الفواصل و المستقيمان $x = 1$ و $x = 3$.

ملاحظات : - يمنع استعمال الآلة الحاسبة مهما كان نوعها

- تعطى $ln2 \approx 0.69, \quad ln3 \approx 1.09$

بالتوفيق

تصحيح الإمتحان 2026

حل تمرين 1: (04ن)

1) حساب $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad D_f=[-1,+\infty[$

ليكن $a\in]-1,+\infty[$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a}=\frac{0}{0}\ \text{ع ت}$$

الضرب في المرافق

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}\right)}$$

2

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال لأن: ع ت $\frac{0}{0}$

اذن تستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ 0.5

2) حساب $\lim_{x \overset{>}{\to} (-1)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لما $a=-1$

1

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{f(x)-f(a)}{x+1}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

نستنتج أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند $x=-1$ اذن مجال قابلية اشتقاق الدالة f هو: $]-1,+\infty[$

0.5

حل تمرين 2: (06ن)

1/ اثبات أن (V_n) م هـ

لدينا:

$$V_n=U_n+3$$
$$=2U_n+3+3$$
$$=2U_n+6$$
$$=2(U_n+3)$$
$$=2V_n$$

1

ومنه (V_n) م هـ أساسها $q=2$ وحدها الاول

$$V_1=U_1+3=1+3=4$$

1

2/ كتابة V_n بدلالة n

$$V_n=V_1\,q^{n-1}$$
$$V_n=4\times 2^{n-1}$$
$$V_n=2^{n+1}$$

1

- استنتاج U_n بدلالة n

$$V_n=U_n+3 \Rightarrow U_n=V_n-3$$
$$\Rightarrow U_n=2^{n+1}-3$$

1

3/ حساب مجموع: $S_n=V_1+V_2+\dots+V_n$

(V_n) م هـ اذن:

$$S_n=V_1\,\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$=4\,\frac{1-2^n}{1-2}$$
$$=4(2^n-1)$$

1

4/ اثبات أن: $T_n=4(2^n-1)-3n$

لدينا: $U_n=V_n-3$

1

$$T_n=(V_1-3)+(V_2-3)+\dots+(V_n-3)$$
$$=V_1+V_2+\dots+V_n-3-3\dots-3$$
$$=4(2^n-1)-3n$$

حل التمرين 3: (10ن)

لدينا $f(x)=x^2-x-\ln x$

$D_f=]0,+\infty[$

1/ أ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cancel{x^2}-\cancel{x}-\cancel{\ln x})$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

(Cf) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$ (0,5)

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty-\infty)$ ح ع ت

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(x-1-\frac{\ln x}{x}\right)\right)$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ (1)

$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

لأن: $(2x+1)(x-1)=2x^2-2x+x-1$
$=2x^2-x-1$

ب) اشارة f' من اشارة البسط × المقام

$x(2x+1)(x-1)=0$ (0,5)

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-1/2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

(1)

x	$-\infty$ $\quad -1/2$	$-1/2 \quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	////	////	$-$	$+$

- f متناقصة على $]0,1]$ (0,5)
- f متزايدة على $]1,+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

(1)

3) معادلة المماس لـ (T)

$f'(2)=\frac{5}{2}$ ، $f(2)=2-\ln 2=1{,}31$ (0,5)

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=\frac{5}{2}(x-2)+2-\ln 2$ (1)

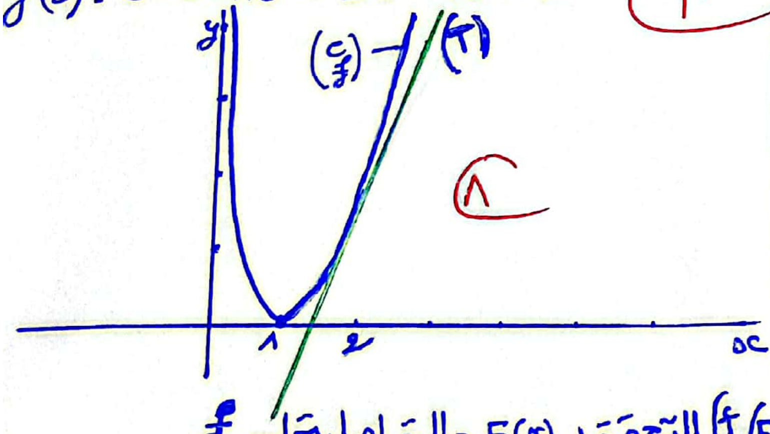
$y=\frac{5}{2}x-5+2-\ln 2$

$y=\frac{5}{2}x-3-\ln 2$

$y=\frac{5}{2}x-3{,}7$

4) حساب $f(3)$ ثم رسم (C_f) و (T)

$f(3)=9-3-\ln 3=6-\ln 3=4{,}9$ (0,5)



(1)

5) أ) التحقق $F(x)$ دالة اصلية لـ f

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x$

$F'(x)=x^2-x+\cancel{1}-\ln x-\cancel{1}$

$F'(x)=x^2-x-\ln x=f(x)$ (1)

ب) حساب المساحة:

$\int_1^3 f(x)\,dx=[f(x)]_1^3$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x\right]_1^3$ (1)

$=\left(9-\frac{9}{2}+3-3\ln 3\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)$

$=\frac{20}{3}-3\ln 3$