

Examen final

Exercice N°1 : Soit l'application T de $D(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\varphi \left(\frac{1}{n^2} \right) - \varphi(0) \right)$$

1. Montrer que T est bien définie et que T est une distribution d'ordre fini.
2. Montrer que T est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$.
3. Dédurre que $\text{supp}T$ est compact.

Exercice N°2 : On considère la suite de fonctions $f_k, k \geq 1$ définies par : $f_k(x) = \sin(kx)$

1. Montrer que f_k définit une distribution T_{f_k} , pour tout $k \geq 1$. Quel est l'ordre de T_{f_k} ?
2. Montrer que $(T_{f_k})_{k \geq 1}$ converge vers "0" dans $D'(\mathbb{R})$. Cette convergence implique-t-elle la convergence ponctuelle de la suite $(f_k)_{k \geq 1}$?
3. On considère la suite de fonctions $g_k, k \geq 1$, définies par

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{\sin(kx)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\langle T_{g_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} \varphi \left(\frac{t}{k} \right) dt \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, déduire que $(T_{g_k})_{k \geq 1}$ converge vers $\pi \delta_0$ dans $D'(\mathbb{R})$.

Indication : on admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice N°3 : On considère la fonction définie par :

$$f(t) = (1 - |t|) \chi(t)_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]},$$

où $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ désigne la fonction caractéristique de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1. Tracer le graphe de la fonction f .
2. a) Est-ce que f est dérivable ?
 b) Déterminer la distribution f' .
3. Déterminer la distribution f'' .

Bon courage
 Dr. DAKHIA G.