Examen de Fonctions Spéciales en Physique

Exercice N°1 (5 pts):

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{N}^*$

- Vérifier que $\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t^s)^{y-1}dt = \frac{1}{s}\mathcal{B}(\frac{x}{s}, y)$

où $\mathcal{B}(x, y)$ est la fonction béta de Euler .

Exercice N°2 (5 pts):

Montrer que si on propose ce changement de variable suivant $u = (t-a)^2$

alors le résultat de cette intégrale sera $\int_0^\infty e^{2at-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\; e^{a^2}$ où $a = cst$

Exercice N°3 (5 pts):

Soit la fonction suivante $f(x) = |x|$ et $x \in [-\pi, +\pi]$

1. Calculer les coefficients de Fourrier de cette fonction.
2. Ecrire la fonction en forme de série de Fourrier.
3. En déduire la somme suivante : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice N°4 (5 pts):

Selon la formule de Rodriguez pour le polynôme de Hermite nous avons :

$$H(x)_n = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$$

1. calculer $H(x)_0$, $H(x)_1$ et $H(x)_2$

2. Recalculer $H(x)_2$ avec la formule de récurrence suivante:

$$H(x)_{n+1} = 2xH(x)_n - 2nH(x)_{n-1}$$

Formules nécessaires

- Coefficients de Fourrier

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(2\pi nx/L)dx \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(2\pi nx/L)dx
\end{aligned}
$$

où

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx/L) + b_n \sin(2\pi nx/L)$$

- La fonction Béta de Euler est définie par :
  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$
- la fonction Gamma d'Euler est définie par :
- $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Bon courage
N. Bensalah