Mohamed Khider University of Biskra
Department of Material Sciences
Module: Mathematics II

Academic Year: 2023/2024
The date : 22/05/2024

إمتحان السداسي الثاني
The Second semester exam

تمرين رقم – 1 – Exercise N°– 1 (10 نقاط)

لنكن المصفوفة: *Let the matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) أثبت أن A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ثم ابحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

Prove that A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ and then find the matrix P where $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

2) أوجد P^{-1}. *Find P^{-1}.*

3) أحسب A^n. *Calculate A^n.*

الحـــل : Solution

لتكن Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) لنثبت أن A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ثم نبحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

Let's prove that A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ and then find the matrix P where $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

1.1) نبدأ بحساب كثير الحدود المميز لـ A :

We start by calculating the characteristic polynomial of A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

1.2) جذور كثير الحدود المميز هي الأعداد الحقيقية 1 بدرجة تضاعف $m(1) = 2$ و 2 درجة التضاعف $m(2) = 1$.

The roots of the characteristic polynomial are the real numbers 1 with a multiple of $m(1) = 2$ and 2 with a multiple of $m(2) = 1$.

1.3) لنحدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية

Let's define the sub-eigen-vectorial spaces

1.1.1) ليكن E_1 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية المضاعفة 1 :

Let E_1 be the sub-eigen-vectorial space of the doubled eigenvalue 1 :

$$E_1 = Ker(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}.$$

If we put إذا وضعنا

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

then: ومنه :

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x, & y, & y - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

المستوي المولد على سبيل المثال من الأشعة $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ تشكل أساس.

The generated plane for example from the vectors $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ and $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forms a basis.

1.2.1) ليكن E_2 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 2 :

Let E_2 be the sub-eigen-vectorial space associated with the simple eigenvalue 2 :

$$E_2 = Ker(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}.$$

then ومنه :

$$X \in E_2 \iff A \cdot X = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0 \text{ and } y = 0$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ هو مستقيم شعاع توجيهه $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و يشكل أساس له.

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ he is straight with vector beam $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and forms the basis for it.

1.3) أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لدرجة تضاعف القيم الذاتية المرافقة لها:

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the degree of multiplication of their associated eigenvalues:

$$\dim E_1 = 2 = m(1), \quad \dim E_2 = 1 = m(2).$$

ومنه المصفوفة A قابلة للتقطير.

So the matrix A is diagonalizable.

1.4) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

In the base (X_1, X_2, X_3), the endomorphism represented by the matrix A (in the canonical basis) has the matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

In other words, we put P the transit matrix whose column vectors are X_1, X_2 and X_3 in order, i.e.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

then, $P^{-1}AP = D$. ومنه $P^{-1}AP = D$.

2) مقلوب المصفوفة P^{-1} هو: The inverse of the matrix P^{-1} is:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculate A^n. (3 **حساب** A^n.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

تمرين رقم – 2 – Exercise N° (5 نقاط)

Calculate the following integrals: أحسب التكاملات التالية:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

$$2) \int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$$

الحـــل : Solution

Calculate the integral (1) **حساب التكامل**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

by placing **بوضع**

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه تتغير حدود التكامل من x **الى** t **كما يلي**

Hence, the bounds of integration change from x to t as follows

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

from it we find **ومنه نجد**

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}t^3\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(2) $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

ليكن تغيير المتغير $u = \exp x$. ومنه $x = \ln u$ و $du = \exp x\,dx$ الذي يكتب أيضا $dx = \frac{du}{u}$.

Let the variable be changed to $u = \exp x$. Including $x = \ln u$ and $du = \exp x\,dx$ which also writes $dx = \frac{du}{u}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3+\exp(-x)} &= \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\left(\frac{du}{u}\right) \\ &= \int \frac{du}{3u+1} = \\ &\quad \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c \\ &= \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c\end{aligned}$$

تمرين رقم – 3 – Exercise N° (5 نقاط)

أثبت أن المعادلة التالية هي معادلة ريكاتي ثم حل المعادلة التفاضلية

Prove that the following equation is the Riccati equation and then solve the differential equation

$$y' = y + y^2 + 1.$$

لاحظ أنه يمكن كتابة *Note that it can be written*

$$y^2+y+1 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

الحـــل : Solution

إثبات أن المعادلة التفاضلية التالية معادلة ريكاتي:

We prove that the following differential equation is a Riccati equation:

$$y' = y + y^2 + 1.$$

المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي بسيطة ذات معاملات ثابتة. تكتب من الشكل العام :

The given equation is a simple Riccati equation with constant coefficients. Written in general form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x) = 0$$

by comparison we find **بالمطابقة نجد**

$$\begin{aligned} y' - y^2 - y - 1 &= 0. \\ y' + (P(x) = -1)\, y^2 + (q(x) = -1)\, y + (r(x) = -1) &= 0. \end{aligned}$$

هنا يمكن فصل المتغيرين x و y بسهولة، لذا يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة من خلال

Here the variables x and y can be easily separated, so the general solution of the equation is given by

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y + y^2 + 1, \ \Rightarrow \frac{dy}{y + y^2 + 1} = dx, \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y + y^2 + 1} = \int dx, \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \int dx, \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int dx, \\ &\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = x + C, \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y + 1}{\sqrt{3}} = x + C. \end{aligned}$$