جامعة محمد خيضر -بسكرة

كلية العلوم و التكنولوجيا
قســـم الكيمياء الصناعية
السنة ثانية لـــــــيسانس

مـيدان:عـلوم وتــكنولوجــيا
المدة : ساعة ونصـــــــــف
السنة الدراسية 2023/2022

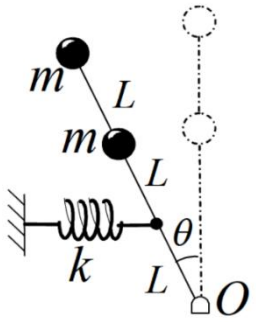
امتحان في مقياس الاهتزازات و الامواج

أسئلة نظرية :

1) اعط عبارة الحل للمعادلة التفاضلية للحركة في حالة اهتزاز نظام حر بدرجة حرية واحدة ؟
2) للحصول على ظاهرة الرنين في نظام قسري نزيد ام نخفض من التخامد ؟
3) ماهي الشروط الابتدائية للحصول على ظاهرة الخفقان في حالة النواسان المترابطان مثلا ؟

التمرين 01 :

ساق مهملة الكتلة بطول 3L تحمل كتلتين m تدور حول محور O و مرتبطة بنابض ثابت مرونته k (الشكل 1)، عند الاتزان تكون الساق شاقولية



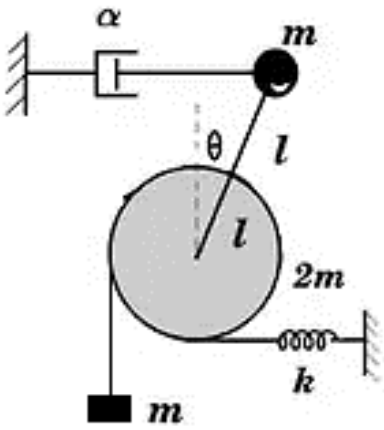
الشكل 01

1) عبر عن الطاقة الكامنة E_p للنظام بدلالة θ ($\theta \ll$).
2) اثبت ان تشوه النابض الابتدائي x_0 معدوم.
3) بسط عبارة E_p في هذه الحالة (من خلال شرط التوازن).
4) اعط عبارة الطاقة الحركية E_c للنظام.
5) اوجد عبارة لاغرانج، و اكتب المعادلة التفاضلية للحركة ثم استنتج عبارة ω_0

التمرين 02 :

الجزء 1

في الشكل المقابل، النظام يهتز حول مهتز ثابت يمر بمركز القرص يتصل بمحيطه نابض ثابت مرونته k و كتلة m معلقة بخيط عديم الامتطاط ، الساق ذات كتلة مهملة معلقة في نهايتها كتلة m موصولة الى مخمد ثابت تخامده α (الشكل 2)، في وضع التوازن تكون الساق في الوضعية الشاقولية



الشكل 02

باعتبار الاهتزازات صغيرة ($\theta \ll$) :

1) اكتب عبارة الطاقة الكامنة E_p ، الطاقة الحركية E_c و دالة التبدد D بدلالة θ.
2) اكتب عبارة لاغرانج ثم المعادلة التفاضلية لحركة النظام
3) بأخذ : $m=0,5Kg,\ k=10N/m,\ L=2m,\ \alpha=1N.s/m,\ g=10m/s^2$
   - استنتج طبيعة حركة النظام و اكتب الحل العام لمعادلة الحركة
4) احسب القيمة التي يجب ان لا تتجاوزها α حتى يكون هناك اهتزاز للنظام ؟

الجزء2

نؤثر على الكتلة المعلقة بخيط بقوة F من الشكل $F = F_0 cos\omega_f$

5) استنتج عبارة المعادلة التفاضلية لحركة هذا النظام
6) أوجد الحل الخاص لمعادلة الحركة مع تحديد عبارة كل من السعة A و فرق الطور φ ؟
7) أحسب معامل الجودة Q

بالتوفيق

شوية .ف

الإجابة النموذجية لامتحان

المسألة الثانية : (3 ن)

1) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ... (1)

2) ذ خ ل ، المتحامل ... (1)

3) $\theta_1(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$ ، $\theta_1(0) = \theta_0$ ، $\theta_2(0) = 0$ (1)

التمرين 1 : 07 نقاط

1) إيجاد عبارة E_p :

$E_p = E_{p_k} + E_{p_m} + E_{p_m}$ /

$= \frac{1}{2}k(x_0+x)^2 + mgh - mgh'$

$= \frac{1}{2}k(x_0+L\theta)^2 - mg2L(1-\cos\theta) - mg3L(1-\cos\alpha)$

$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}K(x_0+L\theta)^2 - \frac{5}{2}mgL\theta^2}$ (0,5)

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = KL(x_0+L\theta) - 5mgL\theta$.

شرط التوازن :

$\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow KLx_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$ (0,5)

2) عبارة E_p بدلالة θ :

$E_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 - \frac{5}{2}mgL\theta^2$

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}(KL^2 - 5mgL)\theta^2}$ (0,5)

1) عبارة E_c بدلالة $\dot{\theta}$:

$E_c = \frac{1}{2}m(2L)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(3L)^2\dot{\theta}^2$

$\boxed{E_c = \frac{13}{2}mL^2\dot{\theta}^2}$ (0,5)

$L = E_c - E_p$ (0,5) أي :

$\boxed{L = \frac{13}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KL^2 - 5mgL)\theta^2}$ (0,5)

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ (0,5)

$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 13mL^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(KL^2 - 5mgL)\theta \end{cases}$ (1)

$13mL^2\ddot{\theta} + (KL^2 - 5mgL)\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{KL^2 - 5mgL}{13mL^2}\right)\theta = 0$ (1)

$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ / $\omega_0 = \sqrt{\frac{KL^2 - 5mgL}{13mL^2}}$ (1)

(0,5)

التمرين 2 : 07 نقاط

1) إيجاد عبارة E_p :

$E_p = E_{p_k} + E_{p_m}$

$= \frac{1}{2}kl\theta^2 + mg2l(1-\cos\alpha)$ ($1-\cos\alpha = \frac{\theta^2}{2}$)

$E_p = \frac{1}{2}kl^2\theta^2 + mgl\theta^2$

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}(kl^2 - 2mgl)\theta^2}$ (0,5)

$\delta = \frac{1}{\tau_{1/2}} = 0{,}66\ s^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1\times 2 - 2\times 0{,}1\times 10}{6\times 0{,}1\times 2}} = 1{,}29\ rad/s$

$\delta < \omega_0 \Rightarrow$ (0,5) الحركة شبه دورية

عبارة q من الشكل: $q = Ce^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ (0,5)

$\frac{\alpha}{3m} < \sqrt{\frac{k\ell - 2mg\ell}{6m\ell}} \Rightarrow \alpha < 1{,}93$ (0,5)

2.1 إثبات المعادلة التفاضلية:

$E_C = E_{C_m} + E_{C_n} + E_{C_{2m}}$

$= \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(2\ell)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\dot\theta^2$

$E_C = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2m)\ell^2\right)\dot\theta^2$ (0,5)

$E_C = 3m\ell^2\dot\theta^2$ (0,5) $\quad L = 3m\ell^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}(k\ell^2 - 2mg\ell)\theta^2$ (0,5)

$D = \frac{1}{2}\alpha(2\ell)^2\dot\theta^2 \Rightarrow D = 2\alpha\ell^2\dot\theta^2$ (0,5)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = 0$ (0,5)

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = 6m\ell^2\ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(k\ell^2 - 2mg\ell)\theta$ (1,5)

$\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = 4\alpha\ell^2\dot\theta$

$6m\ell^2\ddot\theta + 4\alpha\ell^2\dot\theta + (k\ell^2 - 2mg\ell)\theta = 0$

$\ddot\theta + \frac{4\alpha}{6m}\dot\theta + \left(\frac{k\ell^2 - 2mg\ell}{6m\ell^2}\right)\theta = 0$

$\ddot\theta + \frac{2\alpha}{3m}\dot\theta + \left(\frac{k\ell - 2mg}{6m\ell}\right)\theta = 0$ (0,5)

$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$ (0,5)

$2\delta = \frac{2\alpha}{3m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{3m}$ (0,5)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k\ell - 2mg}{6m\ell}}$ (0,5)

لدينا: $\ddot\theta + \frac{2\alpha}{3m}\dot\theta + \frac{k\ell - 2mg}{6m\ell}\theta = \frac{f_0}{6m\ell}\cos\omega_f t$

$\ddot\theta + \frac{4\alpha\ell^2}{6m\ell^2}\dot\theta + \left(\frac{k\ell^2 - 2mg\ell}{6m\ell^2}\right)\theta = \frac{f_0\cdot\ell}{6m\ell}\cos\omega_f t$

$\ddot\theta + \frac{2\alpha}{3m}\dot\theta + \left(\frac{k\ell - 2mg}{6m\ell}\right)\theta = \frac{f_0}{6m\ell}\cos\omega_f t$ (0,5)

$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = \frac{f_0}{6m\ell}\cos\omega_f t$ (0,5)

إيجاد الحل الخاص:

$\bar\theta_p = Ae^{i(\omega_f t + \varphi)} = \bar A e^{i\omega_f t}$

$\dot{\bar\theta}_p = i\bar A\omega_f e^{i\omega_f t} = i\omega_f\bar\theta_p$

$\ddot{\bar\theta} = -\omega_f^2\bar A e^{i\omega_f t} = -\omega_f^2\bar\theta_p$

بالتعويض في المعادلة (1):

$\ddot{\bar\theta}_p + 2\delta\dot{\bar\theta}_p + \omega_0^2\bar\theta_p = \frac{f_0}{6m\ell}e^{i\omega_f t}$

$\bar\theta_p\left[(\omega_0^2 - \omega_f^2) + i2\delta\omega_f\right] = \frac{f_0}{6m\ell}e^{i\omega_f t}$

Scanné avec CamScanner

$$\bar{\theta}_p = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_f^2) + 2j\omega_f\delta} e^{j\omega_f t}$$

$$\bar{A} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_f^2) + 2j\delta\omega_f}$$

$$A = |\bar{A}| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\delta^2\omega_f^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\bar{A}}{\mathrm{Re}\,\bar{A}} = \frac{-2\delta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)$$

حساب معامل الجودة :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1,29}{2\times 0,66} = 0,977$$

$$Q = 1$$

Scanné avec CamScanner